Developpement d'un determinant selon une colonne - Formules de Kronecker

On s'intéresse toujours à une matrice $M = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$. Notons M_{ij} la matrice carrée d'ordre $n-1$ obtenue en supprimant la i ième ligne et la j ième colonne de M. On appelle *cofacteur d'indice* (i,j) le nombre $C_{ij} = (-1)^{i+j} \det M_{ij}$. Par exemple, lorsque $n = 2$, on a $C_{11} = a_{22}$, $C_{12} = -a_{21}$, $C_{21} = -a_{12}$ et $C_{22} = a_{11}$. Le théorème suivant permet de ramener le calcul d'un déterminant d'ordre n au calcul de n déterminants d'ordre $n-1$. On peut ainsi, théoriquement parce que c'est en fait très long, calculer par cette méthode les déterminants d'ordre quelconque.

Théorème 11.3.– *Pour chaque* $i, j = 1, \ldots, n$, *on a les formules*

$$\det M = a_{1j}C_{1j} + \cdots + a_{nj}C_{nj}$$

(développement suivant la j *ième colonne) et*

$$\det M = a_{i1}C_{i1} + \cdots + a_{in}C_{in}$$

(développement suivant la i *ième ligne).*

Démonstration. Démontrons la première formule (la seconde se démontre de la même façon ou s'obtient à partir de la première en considérant la transposée de M). Le déterminant est multilinéaire; en particulier, il est linéaire en la i ième colonne. Si N_{ij} est la matrice obtenue à partir de M en remplaçant tous les éléments de la j ième colonne, sauf celui de la i ième ligne, par 0, on obtient

$$\det M = \det N_{1j} + \cdots + \det N_{nj} \ .$$

Si l'on fait passer la j ième colonne de N_{ij} à la première place, le déterminant est multiplié par $(-1)^{j-1}$ (cela revient à faire $j-1$ transpositions de colonnes); de même, si l'on fait passer la i ième ligne de N_{ij} à la première place, le déterminant est multiplié par $(-1)^{i-1}$. On a donc

$$\det N_{ij} = (-1)^{(i-1)+(j-1)} \begin{vmatrix} a_{ij} & a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ 0 & & & \\ \cdot & & & \\ \cdot & & M_{ij} & \\ \cdot & & & \\ 0 & & & \end{vmatrix} .$$

Par la proposition 11.1, cela vaut $a_{ij}C_{ij}$, et la proposition est démontrée. ■

(11.5) Puisqu'on a n^2 cofacteurs, on peut en faire une matrice $\widetilde{M}$ dont le coefficient d'ordre (i,j) est C_{ij}. On l'appelle la *comatrice de* M. La proposition suivante généralise la formule de l'exemple 10.7.

$$M\ {}^t\widetilde{M} = {}^t\widetilde{M}\ M = (\det M)\ I_n \ ;$$

Formules de Kronecker --> *en particulier, si* M *est inversible, son inverse est donné par*

$$M^{-1} = \frac{1}{\det M}\ {}^t\widetilde{M} \ .$$

Définition 13.1.– *Soit* u *un endomorphisme de* E. *S'il existe un scalaire* λ *et un vecteur non nul* x *de* E *vérifiant* $u(x) = \lambda x$, *on dit que* λ *est une* valeur propre *de* u, *et que* x *est un* vecteur propre *de* u *associé à* λ.

Définition 13.3.– *Soient* u *un endomorphisme de* E *et* λ *une valeur propre de* u. *On appelle* sous-espace propre *associé à* λ *le sous-espace vectoriel* $\mathrm{Ker}(\lambda \mathrm{Id}_{\mathrm{E}} - u)$ *de* E *; on le note* E_λ.

Proposition 13.4.– *Soient* u *un endomorphisme de* E *et* λ *un scalaire. Pour que* λ *soit valeur propre de* u, *il faut et il suffit que* $\det(\lambda \mathrm{Id}_{\mathrm{E}} - u) = 0$.

Définition 13.5.– *On dit que des sous-espaces vectoriels* $\mathrm{E}_1, \dots, \mathrm{E}_p$ *d'un espace vectoriel* E *sont* en somme directe *si l'application*

$$\begin{aligned} \rho : \mathrm{E}_1 \times \cdots \times \mathrm{E}_p &\longrightarrow \mathrm{E} \\ (x_1, \dots, x_p) &\longmapsto x_1 + \cdots + x_p \end{aligned}$$

est injective. Si ρ *est bijective, on dit que* E est somme directe de $\mathrm{E}_1, \dots, \mathrm{E}_p$, *et on écrit* $\mathrm{E} = \mathrm{E}_1 \oplus \cdots \oplus \mathrm{E}_p$.

Proposition 13.6.– *Soient* $\mathrm{E}_1, \dots, \mathrm{E}_p$ *des sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel* E. *On suppose* $\mathrm{E} = \mathrm{E}_1 \oplus \cdots \oplus \mathrm{E}_p$.

a) *On a* $\dim \mathrm{E} = \dim \mathrm{E}_1 + \cdots + \dim \mathrm{E}_p$.

b) *Si* $\mathcal{B}_j$ *est une base de* E_j, *pour* $j = 1, \dots, p$, *alors la famille obtenue en juxtaposant* $\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_p$ *est une base de* E.

Proposition 13.7.– *Les sous-espaces propres d'un endomorphisme associés à des valeurs propres deux à deux distinctes sont en somme directe.*

Corollaire 13.8.– *Le nombre de valeurs propres d'un endomorphisme de* E *est au plus la dimension de* E.

Définition 14.1.– *On dit qu'un endomorphisme* u *de* E *est* diagonalisable *s'il existe une base de* E *formée de vecteurs propres de* E.

Pour les matrices : Un matrice A est diagonalisable si et seulement s'il existe une matrice de passage P telle que A' = $P^{-1}AP$ soit diagonale.

Proposition 14.3.– *Soient* u *un endomorphisme de* E *et* $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ *ses valeurs propres distinctes. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) u *est diagonalisable ;*

(ii) $\mathrm{E} = \mathrm{E}_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus \mathrm{E}_{\lambda_p}$;

(iii) $\dim \mathrm{E}_{\lambda_1} + \cdots + \dim \mathrm{E}_{\lambda_p} \geq \dim \mathrm{E}$.

Corollaire 14.4.– *Soit* E *un espace vectoriel de dimension* n. *Tout endomorphisme de* E *qui a* n *valeurs propres distinctes est diagonalisable.*

Proposition 15.4.– *Pour qu'un scalaire* λ *soit valeur propre de* M, *il faut et il suffit que* $\det(\lambda \mathrm{I}_n - \mathrm{M})$ *soit nul.*

Théorème 15.5.– *Le déterminant de la matrice* $\mathrm{TI}_n - \mathrm{M}$ *est un polynôme en* T *unitaire de degré* n, *appelé* polynôme caractéristique de M, *et noté* $\mathrm{P_M}$.

Théorème 16.1.– *Des matrices semblables ont même polynôme caractéristique.*

Théorème 17.1.– *Soient* A *et* B *des polynômes. Si* B *n'est pas nul, il existe des polynômes* Q *et* R, *uniquement déterminés, tels que*

$$\mathrm{A} = \mathrm{BQ} + \mathrm{R} \qquad \text{et} \qquad \deg \mathrm{R} < \deg \mathrm{B} .$$

Corollaire 17.3.– *Pour qu'un élément* α *de* K *soit racine de* P, *il faut et il suffit que* P *soit divisible par* $\mathrm{T} - \alpha$.

(17.4) On appelle *idéal* tout sous-ensemble non vide I de $\mathrm{K[T]}$ tel que, si A et B sont dans I, le polynôme $\mathrm{A} - \mathrm{B}$ soit dans I, ainsi que tout polynôme multiple de A.

Théorème de Bézout 17.8.– *Pour que des polynômes* A *et* B *soient premiers entre eux, il faut et il suffit qu'il existe des polynômes* U *et* V *tels que* $\mathrm{AU} + \mathrm{BV} = 1$.

Lemme de Gauss 17.9.– *Soient* A, B *et* C *des polynômes.*

a) *Si* A *et* B *sont premiers entre eux et que* A *divise* BC, *alors* A *divise* C.

b) *Si* A *est premier avec* B *et avec* C, *il est premier avec* BC.

Corollaire 17.10.– *Soient* $\mathrm{P}, \mathrm{P}_1, \ldots, \mathrm{P}_m$ *des polynômes.*

a) *Si les polynômes* $\mathrm{P}_1, \ldots, \mathrm{P}_m$ *sont premiers entre eux deux à deux et divisent* P, *le produit* $\mathrm{P}_1 \cdots \mathrm{P}_m$ *divise* P.

b) *Si* P *est premier avec chacun des polynômes* $\mathrm{P}_1, \ldots, \mathrm{P}_m$, *il est premier avec* $\mathrm{P}_1 \cdots \mathrm{P}_m$.

Définition 18.1.– *On dit qu'une matrice est* trigonalisable *si elle est semblable à une matrice triangulaire supérieure. On dit qu'un endomorphisme est* trigonalisable *s'il existe une base dans laquelle sa matrice est triangulaire supérieure.*

Théorème 18.2.– *Pour qu'un endomorphisme d'un* K*-espace vectoriel soit trigonalisable, il faut et il suffit que son polynôme caractéristique soit scindé dans* K.

Théorème de Hamilton-Cayley 18.3.– *Soit* u *un endomorphisme d'un espace vectoriel* E *; on a* $\mathrm{P}_u(u) = 0$. le polynôme minimal divise le polynôme caractéristique.

Proposition 19.1.– *Soit* u *un endomorphisme d'un* K*-espace vectoriel* E *de dimension finie. Il existe un unique polynôme unitaire* p_u *à coefficients dans* K *tel qu'un polynôme* P *à coefficients dans* K *vérifie* $\mathrm{P}(u) = 0$ *si et seulement si* p_u *divise* P. *On l'appelle le* polynôme minimal *de* u.

Théorème 19.3.– *Les valeurs propres d'un endomorphisme sont les racines de son polynôme minimal.*

Lemme des noyaux 20.1.– *Soient u un endomorphisme d'un espace vectoriel* E *et* P *un polynôme.*

a) *Le sous-espace vectoriel* $\operatorname{Ker} \mathrm{P}(u)$ *de* E *est stable par* u *, c'est-à-dire*

$$u\big(\operatorname{Ker} \mathrm{P}(u)\big) \subset \operatorname{Ker} \mathrm{P}(u) \ ;$$

b) *si* $\mathrm{P} = \mathrm{AB}$ *, avec* A *et* B *premiers entre eux, on a*

$$\operatorname{Ker} \mathrm{P}(u) = \operatorname{Ker} \mathrm{A}(u) \oplus \operatorname{Ker} \mathrm{B}(u) \ .$$

Corollaire 20.2.– *Soient* u *un endomorphisme d'un espace vectoriel* E*, et* $\mathrm{P}_1, \ldots, \mathrm{P}_m$ *des polynômes premiers entre eux deux à deux ; on pose* $\mathrm{P} = \mathrm{P}_1 \cdots \mathrm{P}_m$ *. On a*

$$\operatorname{Ker} \mathrm{P}(u) = \operatorname{Ker} \mathrm{P}_1(u) \oplus \cdots \oplus \operatorname{Ker} \mathrm{P}_m(u) \ .$$

Soient u un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension n, et $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ ses valeurs propres distinctes ; *on suppose que son polynôme minimal est scindé*, c'est-à-dire qu'il se décompose en

$$p_u(\mathrm{T}) = \prod_{j=1}^{p} (\mathrm{T} - \lambda_j)^{m_j} \ ,$$

avec $m_j > 0$ pour tout j (th. 19.3).

Définition 20.3.– *Sous les hypothèses et avec les notations précédentes, on appelle* sous-espace caractéristique *associé à la valeur propre* λ_j *le noyau de l'endomorphisme* $(u - \lambda_j \mathrm{Id}_{\mathrm{E}})^{m_j}$ *; on le note* E'_{λ_j} .

Le lemme 20.1.a) entraîne que l'espace caractéristique E'_{λ} est stable par u. Il contient l'espace propre E_{λ} :

$$\boxed{\mathrm{E}_{\lambda} \subset \mathrm{E}'_{\lambda}}$$

Si le polynôme caractéristique de u est scindé, il se décompose en

$$\mathrm{P}_u(\mathrm{T}) = \prod_{j=1}^{p} (\mathrm{T} - \lambda_j)^{n_j} \ .$$

(20.4) On appelle n_j la *multiplicité* de la valeur propre λ_j. Par (17.12), le polynôme minimal est aussi scindé, et l'on a $m_j \leq n_j$ pour tout j, par le théorème de Hamilton-Cayley.

Théorème 20.6.– *Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel E dont le polynôme caractéristique est scindé.*

a) *L'espace vectoriel E est somme directe des espaces caractéristiques de u.*

b) *La dimension de E'_λ est la multiplicité n_λ de la valeur propre λ. En particulier, la dimension de l'espace propre E_λ est $\leq n_\lambda$.*

(20.7) La démonstration précédente montre que toute matrice dont le polynôme caractéristique est scindé est semblable à une matrice diagonale par bloc où chaque bloc a une seule valeur propre.

On dit qu'un endomorphisme w est *nilpotent* s'il existe un entier positif m tel que $w^m = 0$.

Théorème (Décomposition de Dunford) 20.8.– *Soit u un endomorphisme dont le polynôme caractéristique est scindé. On peut écrire $u = v + w$ où v est diagonalisable, w nilpotent et $vw = wv$.*

Démonstration. Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel E dont le polynôme caractéristique est scindé. La démonstration du théorème précédent montre qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E dans laquelle la matrice de u est diagonale par blocs, chaque bloc n'ayant qu'une seule valeur propre. Soit v l'endomorphisme de E de matrice

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \mathrm{I}_{n_1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 \mathrm{I}_{n_2} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & . & & . \\ . & . & & . & . \\ 0 & 0 & & . & \lambda_p \mathrm{I}_{n_p} \end{pmatrix}$$

dans la base $\mathcal{B}$. Il est clair que v est diagonalisable et commute avec $w = u - v$. On a d'autre part $w^{\max\{m_1,\ldots,m_p\}} = 0$, ce qui montre le théorème. ■

Théorme : Tout endomorphisme dont le polynôme caractéristique est scindé admet une décomposition de Dunford. Cette décomposition est <u>unique</u>.

Lemme : Deux matrices diagonalisables commutent si et seulement si elles sont diagonalisables dans une même base.

Théorème 20.9.– *Soit* u *un endomorphisme d'un espace vectoriel* E. *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) u *est diagonalisable ;*

(ii) *le polynôme caractéristique de* u *est scindé et la dimension de chaque espace propre* E_λ *est égale à la multiplicité de la valeur propre* λ *;*

(iii) *le polynôme minimal de* u *est scindé et n'a que des racines simples.*

Lorsque le polynôme caractéristique de u est scindé, une condition nécessaire et suffisante pour que u soit diagonalisable est donc $\mathrm{E}_\lambda = \mathrm{E}'_\lambda$ pour toute valeur propre λ.

Exponentielles de matrices

$$\exp \mathrm{M} = e^{\mathrm{M}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathrm{M}^k}{k!}$$

Proposition 25.2.– *Si* M *et* N *sont des matrices carrées qui commutent (c'est-à-dire qui vérifient* $\mathrm{MN} = \mathrm{NM}$ *), on a*

$$e^{\mathrm{M}+\mathrm{N}} = e^{\mathrm{M}} e^{\mathrm{N}} = e^{\mathrm{N}} e^{\mathrm{M}} .$$

Corollaire 25.3.– *Si* M *est une matrice carrée,* e^{M} *est inversible, d'inverse* $e^{-\mathrm{M}}$.

Proposition 25.4.– *Si* M *et* N *sont des matrices carrées semblables, c'est-à-dire qu'il existe une matrice inversible* P *telle que* $\mathrm{N} = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{MP}$, *alors* e^{M} *et* e^{N} *sont semblables ; plus précisément*

$$e^{\mathrm{P}^{-1}\mathrm{MP}} = \mathrm{P}^{-1} e^{\mathrm{M}} \mathrm{P} .$$

Proposition 26.5.– *Soit* M *une matrice carrée. La fonction* $t \mapsto e^{t\mathrm{M}}$ *est dérivable sur* $\mathbf{R}$, *de dérivée en* t_0 *la matrice* $\mathrm{M}e^{t_0\mathrm{M}}$ *(aussi égale à* $e^{t_0\mathrm{M}}\mathrm{M}$ *).*